4.2.12 Slovní úlohy o směsích II

Předpoklady: 040211

Pedagogická poznámka: Hodinu je nutné organizovat tak, aby se 15 minut před koncem hodiny začalo pracovat na posledních dvou příkladech na společnou práci. U prvního nemá cenu příliš dlouho čekat na žákovská řešení (v naprosté většině případů nejsou použitelná v komplikovanějších případech). Druhý už krokujeme.

Př. 1: Napiš hlavní myšlenku, ze které vycházíme při řešení příkladů o směsích.

Množství čisté látky (čistého ředidla) se smícháním nemění.

Př. 2: Sestav rovnice pro řešení následujících příkladů. Rovnice neřeš.
a) Smícháme 3 litry 20 % roztoku a 2 litry 55 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
b) Kolik ml 90 % kyseliny musíme přidat do 55 ml 20 %, abychom získali roztok o koncentraci 35 %?
c) Smícháním 2 l roztoku o koncentraci 25 %, 1 l čisté vody a 1,5 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 15 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
d) Koncentrace alkoholu v 10 l kvasu klesla během destilace z 15 % na 3 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?

a) Smícháme 3 litry 20 % roztoku a 2 litry 55 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
$3\cdot 0,2+2\cdot 0,55=(3+2)x$

b) Kolik ml 90 % kyseliny musíme přidat do 55 ml 20 %, abychom získali roztok o koncentraci 35 %?
$x\cdot 0,9+55\cdot 0,2=(x+55)0,35$

c) Smícháním 2 l roztoku o koncentraci 25 %, 1 l čisté vody a 1,5 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 15 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
$2\cdot 0,25+1,5\cdot x=(2+1+1,5)\cdot 0,15$

d) Koncentrace alkoholu v 10 l kvasu klesla během destilace z 15 % na 3 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?
$10\cdot 0,15=(10-x)\cdot 0,03+x\cdot 1$

Př. 3: Smícháme 150 ml 0,9 % roztoku NaCl (fyziologický roztok) a 50 ml 5 % roztoku NaCl. Urči koncentraci výsledného roztoku NaCl. Vyřeš příklad tím, že budeš sledovat množství čisté vody.

150 ml	…	0,9 % NaCl	…	99,1 % vody
50 ml	…	5 % NaCl	…	95 % vody
$150+50$ ml	…	x % NaCl	…	y % vody

Sledujeme množství vody:

$150 \cdot 0,991 + 50 \cdot 0,95 = (150 + 50)\, y \qquad / : 200$

$$y = \frac{150 \cdot 0,991 + 50 \cdot 0,95}{200} = 0,98075 = 98,075\ \%$$

Koncentrace soli: $100 - 98,075 = 1,925\ \%$

Získáme roztok o koncentraci $1,925\ \%$.

Pedagogická poznámka: Žáci většinou používají pro koncentraci vody i soli stejnou proměnnou *x*. Nebojuji proti tomu, pokud vědí, co dělají. Sám používám pro koncentraci vody jinou proměnnou, abych jasně odlišil, že jde o jinou věc.

Př. 4: Vymysli k následujícím rovnicím slovní zadání na míchání směsí.

a) $3 \cdot 0,4 + x \cdot 0,1 = (3 + x) \cdot 0,3$
b) $3 \cdot x + 2 \cdot 0,62 = 5 \cdot 0,39$
c) $0,3 \cdot 0,4 = (0,3 + x) \cdot 0,21$
d) $3 \cdot 1,2 + 2 \cdot 0,7 = 5 \cdot 0,75$
e) $5 \cdot 0,2 + x = (5 + x) \cdot 0,75$
f) $2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,92 = 5 \cdot x$

a) $3 \cdot 0,4 + x \cdot 0,1 = (3 + x) \cdot 0,3$

Kolik litrů 10 % roztoku musíme smíchat se 3 litry 40 % roztoku, abychom získali 30 % roztok?

b) $3 \cdot x + 2 \cdot 0,62 = 5 \cdot 0,39$

Smícháním 3 litrů roztoku o neznámé koncentraci a 2 litrů roztoku o koncentraci 62 % jsme získali roztok o koncentraci 39 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.

c) $0,3 \cdot 0,4 = (0,3 + x) \cdot 0,21$

Kolik litrů čisté vody musíme přimíchat do 0,3 litru roztoku o koncentraci 40 %, abychom získali roztok o koncentraci 21 %?

d) $5 \cdot 0,2 + x = (5 + x) \cdot 0,75$

Předchozí rovnice nevyjadřuje smíchávání směsí. Čísla 2 a 3 by měla vyjadřovat množství směsí (vystupují na levé straně a na pravé je v závorce jejich součet) $\Rightarrow$ číslo 1,2 by mělo představovat koncentraci směsi, ale ta nemůže být větší než 1.

e) $5 \cdot 0,2 + x = (5 + x) \cdot 0,75$

Kolik litrů čistého lihu musíme přimíchat do 5 litrů roztoku o koncentraci 20 %, abychom získali roztok o koncentraci 75 %?

f) $2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,92 = 5 \cdot x$

Předchozí rovnice nevyjadřuje smíchávání směsí. Čísla 2 a 3 by měla vyjadřovat množství směsí (jsou větší než 1, tedy nemohou představovat koncentrace a násobíme je čísly, které koncentrace představovat mohou) $\Rightarrow$ na pravé straně by měl být jejich součet (číslo 7), ale je tam číslo 5 (které nemůže představovat koncentraci).

Př. 5: Zkušená úřednice zkontroluje dokumentaci projektu za 10 hodin, začínající k tomu potřebuje o pět hodin více. Za jak dlouho zkontrolují jeden projekt společně?

Nejjednodušší typ příkladu na společnou práci, dá se řešit úsudkem. Sledujeme průběh kontroly:

Zkušená úřednice: celý projekt ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ projektu.

Začínající úřednice: celý projekt ... 15 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{15}$ projektu.

Obě úřednice za 1 hodinu: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ projektu $\Rightarrow$ celý projekt zkontrolují za 6 hodin.

Obě úřednice zkontrolují společně celý projekt za 6 hodin.

Řešení příkladu úvahou je sice hezké, ale většina příkladů je tak těžkých, že s úvahou nevystačíme a musí nastoupit rovnice. Naštěstí předchozí úvaha ukazuje hlavní fintu, která se na řešení těchto úloh používá:
Vyjádříme si, jakou část práce udělá každý účastník za jednotku času, a pomocí těchto částí sledujeme vykonání celé práce.
Teď si předchozí příklad vyzkoušíme vyřešit rovnicí.

Zkušená úřednice: celý projekt ... 10 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{10}$ projektu.

Začínající úřednice: celý projekt ... 15 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu ... $\frac{1}{15}$ projektu.

Doba nutná k zkontrolování projektu ... x.

Když sečteme část projektu, kterou zkontroluje zkušená úřednice, a část, kterou zkontroluje začínající kolegyně, získáme celý projekt: $x\frac{1}{10}+x\frac{1}{15}=1$.

Proč je v rovnici $x\frac{1}{10}$?
Tento výraz vyjadřuje část projektu, kterou zkontroluje zkušená úřednice (za jednu hodinu zkontroluje $\frac{1}{10}$, za x hodin pak $x\frac{1}{10}$).
Proč je na pravé straně rovnice 1?
Když sečteme část projektu zkontrolovanou zkušenou úřednicí a část projektu zkontrolovanou začínající úřednicí, získáme celý projekt..
Jakmile máme rovnici, stává se z řešení příkladu manuální záležitost.

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=1 \quad / \cdot 30$$
$$3x+2x=30$$
$$5x=30 \quad / :5$$
$$x=6$$

Př. 6: Funkčním čerpadlem dokáží hasiči načerpat vodu do cisterny za 8 minut. Při posledním zásahu na konci čerpání cisterny došlo k poškození těsnění a čerpadlu velmi znatelně klesl výkon. Hasiči rychle dojeli pro záložní čerpadlo připravené u druhého zásahového vozu, které stihli připravit ještě před příjezdem prázdné cisterny od požáru, cisternu pak oběma čerpadly naplnili za 6 minut. Jak dlouho by trvalo plnění cisterny poškozeným čerpadlem?

Funkční čerpadlo: cisterna $\ldots$ 8 minut $\Rightarrow$ za 1 minutu $\ldots$ $\frac{1}{8}$ cisterny

Poškozené čerpadlo: cisterna $\ldots$ x minut $\Rightarrow$ za 1 minutu $\ldots$ $\frac{1}{x}$ cisterny.

Naplnění cisterny oběma čerpadly trvá 6 minut: $6 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad / \cdot 8x$

$6x + 6 \cdot 8 = 8x \quad / -6x$

$48 = 2x \quad / : 2$

$x = 24$ minut

Poškozeným čerpadlem by se cisterna plnila 24 minut.

Shrnutí: V případech o společném plnění úkolu využíváme části práce, která se vykoná za jednotku času.